Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Физический факультет
Кафедра высшей математики и математической физики

О. А. Кононова,
Н. И. Ильинкова,
Н. К. Филиппова

Метод Лагранжа для линейного неоднородного уравнения

учебно-методическая разработка

Минск
2015

УДК 517.9(075.8)
К 647

Решение о депонировании документа вынес
Совет физического факультета БГУ, протокол №8 от 30.04.2015 г.

Авторы:
доценты кафедры высшей математики и математической физики, кандидаты физико-математических наук : О. А. Кононова, Н. И. Ильинкова, Н. К. Филиппова.

Рецензенты:
Белявский С. С. канд. физ-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики и экономической кибернетики БГЭУ;
Альсевич Л. А. канд. физ-мат. наук, доцент кафедры высшей математики ФПМИ БГУ.

Кононова, О. А. Метод Лагранжа для линейного неоднородного уравнения : учебно-методическая разработка / О. А. Кононова, Н. И. Ильинкова, Н. К. Филиппова ; БГУ, Физический фак., Каф. высшей математики и математической. – Минск : БГУ, 2015. – 16 с. – Библиогр.: с. 16.

Реферат (аннотация): Учебно-методическая разработка «Метод Лагранжа для линейного неоднородного уравнения» содержит теоретическое обоснование метода вариации произвольных постоянных (Метода Лагранжа) для линейного неоднородного уравнения n–го порядка. Пособие содержит достаточно большое количество примеров с подробным описанием их решения, которые могут способствовать лучшему усвоению студентами соответствующего раздела систем дифференциальных уравнений , а также служить основой для контролируемой самостоятельной работы студентов физико-математических специальностей по дисциплине «Дифференциальные уравнения»

Теорема. Общее решение неоднородного линейного уравнения

$$L(y) = f(x) \tag{1}$$

можно найти в квадратурах, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения

$$L(z) = 0 \tag{2}$$

Доказательство

Будем искать общее решение уравнения (1) в виде:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i(x) \tag{3}$$

где $z_i(x), i = \overline{1,n}$ — фундаментальная система решений уравнения (2).

Найдем производные выражения (3), подчиняя их $n-1$ условиям:

$$y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i(x), \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i(x) = 0$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i'(x), \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i'(x) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z^{(n-1)}{}_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-2)}(x), \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-2)}(x) = 0$$

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z^{(n)}{}_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-1)}(x)$$

Подставим (3) и найденные производные в уравнение (1), получим

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(x) L\left[z_i(x)\right] + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-1)}(x) = f(x) \tag{5}$$

Учитывая, что $L\left[z_i(x)\right] = 0$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) z_i^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Итак, для определения $c_i(x)$ получаем следующую систему из n уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, z_i(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, z_i'(x) = 0 \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, z_i^{(n-2)}(x) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, z_i^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases} \tag{6}$$

Система (6) является линейной и неоднородной относительно $c_i(x)$ с определителем Вронского $W(x) \neq 0$ в интервале (a,b) непрерывности коэффициентов уравнения (2). Решая систему (6) по правилу Крамера получим

$$c_i'(x) = \frac{W_{ni}}{W(x)} f(x),\; i = \overline{1,n} \tag{7}$$

где W_{ni} — алгебраические дополнения к элементам $n-$ой строки определителя Вронского. Из (7) получаем, что

$$c_i(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni} f(x)}{W(x)} dx + c_i,\; i = \overline{1,n} \tag{8}$$

где c_i — произвольные постоянные, $\forall x_0 \in (a,b)$.

Подставляя (8) в выражение (3) получим

$$y = \sum_{i=1}^{n} z_i(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \frac{W_{ni} f(x)}{W(x)} dx + \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(x) c_i,$$

где первое слагаемое является частным решением неоднородного уравнения (1), а второе слагаемое общим решением соответствующего однородного уравнения (2).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - 2y' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x.$$

Для нахождения $c_1(x), c_2(x)$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0, \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = \dfrac{e^x}{x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)x = 0, \\ c_1'(x) + c_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1'(x) = -1, c_2'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow c_1(x) = -x + c_1, c_2(x) = \ln|x| + c_2.$$

Таким образом , $y = c_1e^x + c_2xe^x - xe^x + x\ln|x|e^x$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + 3y' + 2y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x}$.
Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)e^{-x}.$$

Для нахождения $c_1(x), c_2(x)$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-2x} + c_2'(x)e^{-x} = 0, \\ -2c_1'(x)e^{-2x} - c_2'(x)e^{-x} = \dfrac{1}{e^x+1}. \end{cases} \Rightarrow c_1'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}, c_2'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx + c_1 = \int \frac{e^x de^x}{e^x+1} + c_1 = \left[t = e^x\right] =$$

$$= -\int \frac{tdt}{t+1} + c_1 = -t + \ln|t+1| + c_1 = -e^x + \ln|e^x+1| + c_1,$$

$$c_2(x) = \int \frac{e^x dx}{e^x+1} + c_2 = \ln(e^x+1) + c_2$$

Таким образом, $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + \ln(e^x+1)(e^{-2x} + e^{-x}) - e^{-x}$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1\cos x + c_2\sin x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x.$$

Для нахождения $c_1(x), c_2(x)$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases} \Rightarrow c_1'(x) = -1, c_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1(x) = -x + c_1, c_2(x) = \ln|\sin x| + c_2.$$

Таким образом , $y = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = 2\mathrm{tg}x$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 4 = 0, \lambda_1 = -2i, \lambda_2 = 2i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$y = c_1(x)\cos 2x + c_2(x)\sin 2x$.

Для нахождения $c_1(x), c_2(x)$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos 2x + c_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2c_1'(x)\sin 2x + 2c_2'(x)\cos 2x = 2\mathrm{tg}x. \end{cases} \Rightarrow c_1'(x) = -\mathrm{tg}x\sin 2x, c_2'(x) = \mathrm{tg}x\cos 2x.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1(x) = -\int \mathrm{tg}x\sin 2x dx + c_1 = -2\int \frac{\sin x}{\cos x}\sin x\cos x dx + c_1 =$$

$$= -\int (1 - \cos 2x) dx + c_1 = -x + \frac{\sin 2x}{2} + c_1$$

$$c_2(x) = \int \mathrm{tg}x\cos 2x dx + c_2 = \ln|\cos x| + \sin^2 x + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + (\ln|\cos x| + \sin^2 x)\sin 2x + \left(-x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\cos 2x$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$y = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)xe^{-x}$.

Для нахождения $c_1(x), c_2(x)$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)\,e^{-x} + c_2'(x)\,xe^{-x} = 0, \\ -c_1'(x)\,e^{-x} - c_2'(x)\,xe^{-x} + c_2'(x)\,e^{-x} = 3e^{-x}\sqrt{x+1}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x)\,x = 0, \\ -c_1'(x) + c_2'(x)(1-x) = 3\sqrt{x+1}. \end{cases} \Rightarrow c_1'(x) = 3\sqrt{x+1}, c_2'(x) = -3x\sqrt{x+1}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1(x) = -3\int x\sqrt{x+1}dx + c_1 = \left[t = \sqrt{x+1},\, 2tdt = dx\right] =$$

$$= -6\int (t^4 - t^2)\,dt + c_1 = -6\frac{t^5}{5} + 2t^3 + c_1 = -\frac{6}{5}(x+1)^{5/2} + 2(x+1)^{3/2} + c_1,$$

$$c_2(x) = 3\int\sqrt{x+1}dx + c_2 = 2(x+1)^{3/2} + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \left(-\frac{6}{5}(x+1)^{5/2} + 2(x+1)^{3/2}\right)e^{-x} + 2xe^{-x}(x+1)^{3/2} =$$

$$= e^{-x}\left(c_1 + c_2x - \frac{6}{5}(x+1)^{5/2} + 2(x+1)^{3/2} + 2(x+1-1)(x+1)^{3/2}\right) =$$

$$= e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + c_1 + c_2x\right)$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \dfrac{2}{\cos^3 x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = -i, \lambda_2 = i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1\cos x + c_2\sin x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде
$y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$.

Для нахождения $c_1(x), c_2(x)$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \dfrac{2}{\cos^3 x}. \end{cases} \Rightarrow c_1'(x) = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}, c_2'(x) = \frac{2}{\cos^2 x}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1(x) = -2\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}dx + c_1 = 2\int\frac{d\cos x}{\cos^3 x} + c_1 = -\frac{1}{\cos^2 x} + c_1$$

$$c_2(x) = 2\int\frac{dx}{\cos^2 x} + c_2 = 2\mathrm{tg}x + c_2$$

Таким образом, $y = c_1\cos x + c_2\sin x + 2\mathrm{tg}x\sin x - \dfrac{1}{\cos x}$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'' - y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - 1 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде
$y = c_1 \ \ x \ \ e^x + c_2 \ \ x \ \ e^{-x}$.

Для нахождения $c_1 \ \ x \ \ , c_2 \ \ x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' \ \ x \ \ e^x + c_2' \ \ x \ \ e^{-x} = 0, \\ c_1' \ \ x \ \ e^x - c_2' \ \ x \ \ e^{-x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}. \end{cases} \Rightarrow c_1' \ \ x \ \ = \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right), c_2' \ \ x \ \ = -\frac{e^x}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right).$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 \ \ x \ \ = -\int \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)dx + c_1 = \frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) + c_1$$

Таким образом,
$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{x}$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + 4y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 4 = 0, \lambda_1 = -2i, \lambda_2 = 2i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде
$y = c_1 \ \ x \ \ \cos 2x + c_2 \ \ x \ \ \sin 2x$.

Для нахождения $c_1 \ \ x \ \ , c_2 \ \ x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' \ \ x \ \ \cos 2x + c_2' \ \ x \ \ \sin 2x = 0, \\ -2c_1' \ \ x \ \ \sin 2x + 2c_2' \ \ x \ \ \cos 2x = \frac{1}{\cos 2x}. \end{cases} \Rightarrow c_1' \ \ x \ \ = -\frac{\sin 2x}{2\cos 2x}, c_2' \ \ x \ \ = \frac{1}{2}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 \ \ x \ \ = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}dx + c_1 = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + c_1$$

$$c_2 \ \ x \ \ = \frac{1}{2}\int dx + c_2 = \frac{x}{2} + c_2$$

Таким образом,

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln\left|\cos 2x\right|$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 9. Найти общее решение уравнения $y''+y=\mathrm{tg}x$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y''+y=0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2+1=0$, $\lambda_1=-i, \lambda_2=i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y=c_1\cos x+c_2\sin x$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y=c_1\;\;x\;\;\cos x+c_2\;\;x\;\;\sin x$.

Для нахождения $c_1\;\;x\;\;,c_2\;\;x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'\;\;x\;\;\cos x+c_2'\;\;x\;\;\sin x=0, \\ -c_1'\;\;x\;\;\sin x+c_2'\;\;x\;\;\cos x=\mathrm{tg}x. \end{cases} \Rightarrow c_1'\;\;x\;\;=-\frac{\sin^2 x}{\cos x}, c_2'\;\;x\;\;=\sin x.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1\;\;x\;\;=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx+c_1=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx+c_1=-\int\frac{dx}{\cos x}+\int\cos x dx+c_1=$$

$$=-\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}+\sin x+c_1=-\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\sin x+c_1$$

$$c_2\;\;x\;\;=\int\sin x dx+c_2=-\cos x+c_2$$

Таким образом,

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+\cos x\sin x-\cos x\sin x=$$

$$=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 10. Найти общее решение уравнения $y''-y=\frac{1}{x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y''-y=0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2-1=0$, $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$y=c_1\;\;x\;\;e^x+c_2\;\;x\;\;e^{-x}$.

Для нахождения $c_1\;\;x\;\;,c_2\;\;x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{x}+c_2'(x)e^{-x}=0, \\ c_1'(x)e^{x}-c_2'(x)e^{-x}=\dfrac{1}{x}. \end{cases} \Rightarrow c_1'(x)=\frac{e^{-x}}{2x}, c_2'(x)=-\frac{e^{x}}{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1(x)=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-x}}{x}dx+c_1, c_2'(x)=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{x}}{x}dx+c_2.$$

Таким образом, $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+\dfrac{e^{x}}{2}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-x}}{x}dx-\frac{e^{-x}}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{x}}{x}dx$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 11. Найти общее решение уравнения $y'''+y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'''+y'=0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^3+\lambda=0, \lambda_1=0, \lambda_2=-i, \lambda_3=i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде
$y=c_1(x)+c_2(x)\cos x+c_3(x)\sin x$.

Для нахождения $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)+c_2'(x)\cos x+c_3'(x)\sin x=0 \\ -c_2'(x)\sin x+c_3'(x)\cos x=0 \\ -c_2'(x)\cos x-c_3'(x)\sin x=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}, c_2'(x)=-\frac{\sin x}{\cos x}, c_3'(x)=-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1(x)=\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+c_1=-\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x}+c_1=\frac{1}{\cos x}+c_1$$

$$c_2(x)=-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx+c_2=\int\frac{d\cos x}{\cos x}+c_2=\ln|\cos x|+c_2$$

$$c_3(x)=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx+c_3=-\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx+c_3=-\mathrm{tg}x+x+c_3$$

Таким образом,

$$y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x+\frac{1}{\cos x}+\cos x\ln|\cos x|+(-\mathrm{tg}x+x)\sin x$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 12. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y=\dfrac{x^2+2x+2}{x^3}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y''-2y'+y=0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде
$y = c_1 \; x \; e^x + c_2 \; x \; xe^x$.

Для нахождения $c_1 \; x \;, c_2 \; x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' \; x \; e^x + c_2' \; x \; xe^x = 0, \\ c_1' \; x \; e^x + c_2' \; x \; xe^x + c_2' \; x \; e^x = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' \; x \; + c_2' \; x \; x = 0, \\ c_1' \; x \; + c_2' \; x \; \; 1 + x \; = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3} e^{-x}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1' \; x \; = -e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right), c_2' \; x \; = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3} e^{-x}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1 \; x \; = -\int e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx + c_1 = e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x}\right) + c_1$$

$$c_2 \; x \; = \int e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right) dx + c_2 = -e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + e^x e^{-x}\left(1 + \frac{2}{x}\right) - xe^x e^{-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{x}$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 13. Найти общее решение уравнения $y'' - y' = \dfrac{2 - x}{x^3} e^x$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - y' = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - \lambda = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 + c_2 e^x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде
$y = c_1 \; x \; + c_2 \; x \; e^x$.

Для нахождения $c_1 \; x \;, c_2 \; x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1' \; x \; + c_2' \; x \; e^x = 0, \\ c_2' \; x \; e^x = \dfrac{2 - x}{x^3} e^x. \end{cases} \Rightarrow c_1' \; x \; = \frac{-2 + x}{x^3} e^x, c_2' \; x \; = \frac{2 - x}{x^3}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1(x) = \int \frac{-2+x}{x^3} e^x dx + c_1 = \frac{e^x}{x^2} + c_1$$

$$c_2(x) = \int \frac{2-x}{x^3} dx + c_2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + c_2$$

Таким образом, $y = c_1 + c_2 e^x + \dfrac{e^x}{x^2} + e^x \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right) = c_1 + c_2 e^x + \dfrac{e^x}{x}$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 14. Найти общее решение уравнения $y'' + y = -\dfrac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 + 1 = 0, \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде
$y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$.

Для нахождения $c_1(x), c_2(x)$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0 \\ -c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = -\dfrac{1}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1'(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}, c_2'(x) = -\frac{\cos x}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1(x) = \int \frac{\sin x}{\sin 2x \sqrt{\sin 2x}} dx + c_1 =$$

$$= \left[\begin{gathered} \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2} \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{gathered} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{t} + c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} + c_1$$

$$c_2\ \ x\ \ = -\int \frac{\cos x}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}dx + c_2 =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}x = t, x = \mathrm{arctg}t, dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array}\right] = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t^{3/2}} + c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} + c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{tg}x}} + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{tg}x}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{tg}x}}\sin x = c_1\cos x + c_2\sin x + \sqrt{\sin 2x}$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 15. Найти общее решение уравнения $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$y = c_1\ \ x\ \ e^x + c_2\ \ x\ \ e^{-x}$.

Для нахождения $c_1\ \ x\ \ , c_2\ \ x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'\ \ x\ \ e^x + c_2'\ \ x\ \ e^{-x} = 0, \\ c_1'\ \ x\ \ e^x - c_2'\ \ x\ \ e^{-x} = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1'\ \ x\ \ = e^{-x}\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right), c_2'\ \ x\ \ = -e^x\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right).$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1\ \ x\ \ = \int e^{-x}\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)dx + c_1 = e^{-x}\left(-2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + c_1$$

$$c_2\ \ x\ \ = -\int e^{x}\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)dx + c_2 = e^{x}\left(-2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + c_2$$

Таким образом,

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = c_1e^x + c_2e^{-x} - 4\sqrt{x}$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 16. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = -\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2-4\lambda+4=0$, $\lambda_1=\lambda_2=2$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде
$y=c_1\ \ x\ \ e^{2x}+c_2\ \ x\ \ xe^{2x}$.

Для нахождения $c_1\ \ x\ \ ,c_2\ \ x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'\ \ x\ \ e^{2x}+c_2'\ \ x\ \ xe^{2x}=0, \\ 2c_1'\ \ x\ \ e^{2x}+2c_2'\ \ x\ \ xe^{2x}+c_2'\ \ x\ \ e^{2x}=-\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x}}. \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} c_1'\ \ x\ \ +c_2'\ \ x\ \ x=0, \\ 2c_1'\ \ x\ \ +c_2'\ \ x\ \ 1+2x\ \ =-\dfrac{1}{\sqrt{x}}. \end{cases}\Rightarrow c_1'\ \ x\ \ =\sqrt{x},c_2'\ \ x\ \ =-\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1\ \ x\ \ =\int\sqrt{x}dx+c_1=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+c_1,c_2\ \ x\ \ =-\int\frac{dx}{\sqrt{x}}+c_2=-2\sqrt{x}+c_2$$

Таким образом,

$$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}e^{2x}-2x\sqrt{x}e^{2x}=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}e^{2x}$$

является решением исходного уравнения. ▲

Пример 17. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+10y=\dfrac{e^{3x}}{\cos x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение
$y''-6y'+10y=0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2-6\lambda+10=0$, $\lambda_1=3-i,\lambda_2=3+i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y=e^{3x}\ \ c_1\cos x+c_2\sin x\ \ $.
Решение неоднородного уравнения ищем в виде
$y=e^{3x}\ \ c_1\ \ x\ \ \cos x+c_2\ \ x\ \ \sin x\ \ $.

Для нахождения $c_1\ \ x\ \ ,c_2\ \ x$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1{}'\ \ x\ \ e^{3x}\cos x+c_2{}'\ \ x\ \ e^{3x}\sin x=0 \\ c_1{}'\ \ x\ \ e^{3x}\ \ 3\cos x-\sin x\ \ +c_2{}'\ \ x\ \ e^{3x}\ \ 3\sin x+\cos x\ \ =\dfrac{e^{3x}}{\cos x} \end{cases}$$

После упрощения система примет вид

$$\begin{cases} c_1{}'\ \ x\ \ \cos x+c_2{}'\ \ x\ \ \sin x=0 \\ -c_1{}'\ \ x\ \ \sin x+c_2{}'\ \ x\ \ \cos x=\dfrac{1}{\cos x} \end{cases}\Rightarrow c_1'\ \ x\ \ =-\frac{\sin x}{\cos x},c_2'\ \ x\ \ =1.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1\ \ x\ \ =-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx+c_1=\ln|\cos x|+c_1,c_2\ \ x\ \ =\int dx+c_2=x+c_2$$

Таким образом, $y=e^{3x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x+\ln\left|\cos x\right|\cos x+x\sin x\right)$ является решением исходного уравнения. ▲

Пример 18. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+26y=\dfrac{5e^x}{\cos 5x}$.

Δ Решаем соответствующее однородное уравнение $y''-2y'+26y=0$. Для этого записываем характеристический многочлен и находим его корни: $\lambda^2-2\lambda+26=0$, $\lambda_1=1-5i,\lambda_2=1+5i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид: $y=e^x\left(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x\right)$. Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y=e^x\left(c_1(x)\cos 5x+c_2(x)\sin 5x\right)$.

Для нахождения $c_1(x),c_2(x)$ получаем и решаем систему:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x\cos 5x+c_2'(x)e^x\sin 5x=0 \\ c_1'(x)e^x\left(\cos 5x-5\sin 5x\right)+c_2'(x)e^x\left(\sin 5x+5\cos x\right)=\dfrac{5e^x}{\cos 5x} \end{cases}$$

После упрощения система примет вид

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos 5x+c_2'(x)\sin 5x=0 \\ -c_1'(x)\sin 5x+c_2'(x)\cos 5x=\dfrac{1}{\cos 5x} \end{cases}\Rightarrow c_1'(x)=-\frac{\sin 5x}{\cos 5x},c_2'(x)=1.$$

Проинтегрировав, получим:

$$c_1(x)=-\int\frac{\sin 5x}{\cos 5x}dx+c_1=\frac{1}{5}\ln\left|\cos 5x\right|+c_1,c_2(x)=\int dx+c_2=x+c_2$$

Таким образом,

$$y=e^x\left(c_1\cos 5x+c_2\sin 5x+\frac{1}{5}\ln\left|\cos 5x\right|\cos 5x+x\sin 5x\right)$$

является решением исходного уравнения. ▲

Список используемой литературы

1. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.М. Матвеев. – Минск: Высш. шк. , 1974. – 766 с.
2. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – Москва: Наука , 1969. – 320с.
3. Матвеев, Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. – СПб: Лань , 2002. – 432 с.
4. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 176 с.
5. Шилин, А.П. Дифференциальные уравнения. Задачи и примеры/ А.П. Шилин. – Минск :РИВШ, 2008. – 366 с.
6. Тихонов, А.Н. Дифференциальные уравнения / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников – Москва: Наука , 1985. – 231.